22/10/2020

Προηγούμενο μάθημα:

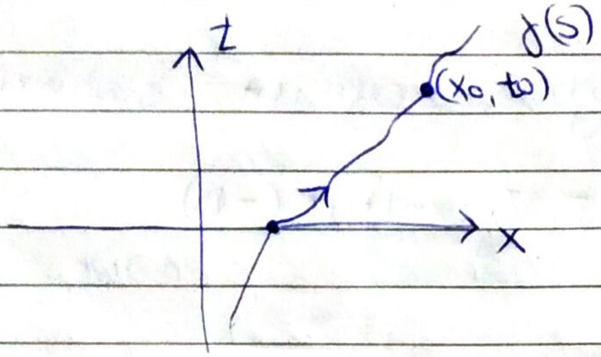
Έστω $b \in \mathbb{R}^n$, $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ δοσμένα. Τότε η μοναδική κλασική λύση $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ της ομογενούς εξίσωσης μεταφοράς

$$\begin{cases} u_t + b \cdot \underbrace{\nabla u}_{= \nabla_x = (\partial x_1, \dots, \partial x_n)} = 0 & \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(\cdot, 0) = g \end{cases}$$

είναι η $u(x,t) = g(x - bt)$

Το μη ομογενές πρόβλημα λύνεται με την ίδια μέθοδο (μέθοδο των χαρακτηριστικών)

Έχουμε $\begin{cases} u_t + b\nabla u = f & \text{στο } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(\cdot, 0) = g \end{cases}$



Θέτουμε $\gamma(s) := (\underbrace{x(s)}_{\in\mathbb{R}^n}, \underbrace{t(s)}_{\in\mathbb{R}})$, $\gamma(0) = (x_0, t_0)$

$z(s) := u(\gamma(s))$, $z(0) = u(x_0, t_0)$

$\Longrightarrow \dot z(s) = [(\underbrace{\nabla}_{\in\mathbb{R}^n}, \underbrace{\partial t}_{\in\mathbb{R}})u](\gamma(s))\cdot\dot\gamma(s)$ [καν. Αλυσίδας]

$= (\nabla u)(x(s), t(s))\underbrace{\dot x(s)}_{=b} + \underbrace{(\partial_t u)}_{=u_t}(x(s), t(s))\underbrace{\dot t(s)}_{=1}$

$\Rightarrow x(s) = x_0 + bs$ $\Rightarrow t(s) = s + t_0$

$= f(x(s), t(s))$

$\Longrightarrow \dot z(s) = f\big(x(s), t(s)\big) = f(x_0 + bs, t_0 + s)$

με $z(0) = u(x_0, t_0)$

$\Longrightarrow$ Θ.Θ.Απ.Λ. $z(s) - z(0) = \int_0^t \dot z(s)\, ds$

$= \int_0^t f(x_0 + bs, t_0 + s)\, ds$

Αφού $z(s) = u(x(s), t(s)) = u(x_0 + bs, t_0 + s)$,
έχουμε $z(-t_0) = u(x_0 - bt_0, 0) = g(x_0 - bt_0)$

$$\Longrightarrow u(x_0, t_0) = g(x_0 - bt_0) - \int_0^{-t_0} f(x_0 + bs, t_0 + s)\, ds$$

Άρα $u(x_0, t_0) = g(x_0 - t_0 b)$

$$- \underbrace{\int_0^{-t_0} f(x_0 + bs, t_0 + s)\, ds}$$

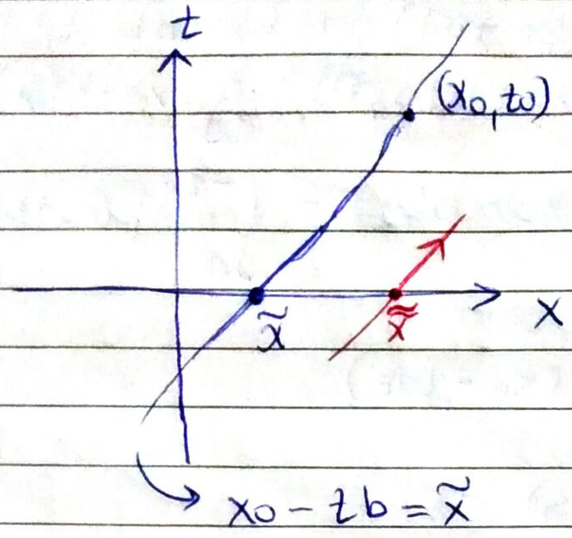
$$= \int_{-t_0}^{0} f(x_0 + bs, \underbrace{t_0 + s}_{=:\sigma})\, ds$$

$$= \int_0^{t_0} f(\underbrace{x_0 + b(\sigma - t_0)}_{x_0 - t_0 b + b\sigma}, \sigma)\, d\sigma$$

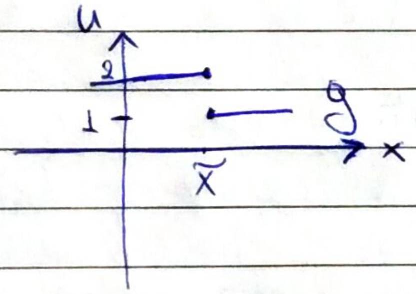
Άρα, λύση της μη ομογενούς εξίσωσης μεταφοράς $u(x,t) = g(x - tb) + \int_0^t f(x + b(s-t), s)\, ds$ (*)

(*) αυτή είναι η μοναδική λύση του ΠΑΤ και είναι κλασική αν $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$

<u>Παρατήρηση</u>: Είδαμε ότι στην ομογενή εξ. μεταφ. η πληροφορία $u(\cdot, 0) = g$ κατά τον αρχικό χρόνο $t=0$ μεταφέρεται αναλλοίωτη κατά μήκος των ευθειών $x_0 - tb = \tilde{x}$



$\Rightarrow$ ΟΥΣΙΑΣΤΙΚΑ, δεν έχει σημασία αν το g είναι C^1!! θα μπορούσε να είναι ακόμα και ασυνεχής συνάρτηση



$\rightarrow$ « ασθενείς λύσεις » έχουν (φυσικό) νόημα.

Εξίσωσεις Laplace $\Delta u = 0$

Εξίσωσεις Poisson $-\Delta u = f$
(= μη ομογενής Laplace) (το μείον έχει θεωρητικούς λόγους)

$u : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό

$$\Delta u = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \partial x_i^2 u}_{= u_{x_i x_i}} = \underbrace{\operatorname{div}(Du)}_{= \underbrace{\nabla}_{= (\partial x_1 \cdots, \partial x_n)} \cdot (\nabla u) = (\partial x_1, \dots, \partial x_n)(\partial x_1 u, \dots, \partial x_n u)}$$

$= \partial_{x_1}^2 u + \dots \partial_{x_n}^2 u$

Η εξίσωση Laplace περιγράφει την πυκνότητα μιας ποσότητας (βυσσινάδα) μέσα σε μία άλλη (νερό) σε κατάσταση ισορροπίας (δηλ. όταν δεν μεταβάλλεται πλέον με τον χρόνο, όταν έχει διαχυθεί σύμφωνα με την εξ. θερμότητας $\underbrace{\partial_t u}_{=0} - \Delta u = 0$.

Μια τέτοια πυκνότητα έχει την ιδιότητα να διαχέεται προς την κατεύθυνση της μεγαλύτερης μείωσής της ως συνάρτηση του χώρου, δηλ. την κατεύθυνση $-\nabla u$.

Σε κατάσταση ισορροπίας

$$\int_{\partial V} (-\nabla u) \cdot \nu \, dS = 0 \overset{\text{Gauss}}{\iff}$$

$$\int_V \underbrace{\nabla \cdot (-\nabla u)}_{-\Delta u} \, dx = 0, \quad \forall \text{ (οσοδήποτε μικρό } V \subset U)$$

$$\Rightarrow -\Delta u = 0.$$

Πως μπορούμε να βρούμε (έστω μία, μη τετριμμένη) λύση της $\Delta u = 0$ στο $\mathbb{R}^n$;
(τετριμμένες: $u(x) = a x + c$, $a \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$
όλες οι ομοπαράλληλες)

Θέλουμε να βρούμε μία $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ με $\Delta u = 0$ (μία αρμονική συνάρτηση στο $\mathbb{R}^n$) ψάχνουμε μία ακτινική (radial) δηλ. μία u

της μορφής $u(x) = v(\underbrace{|x|}_{=(x_1^2+\dots+x_n^2)^{1/2}} \quad =[\|x\|])$

[Θεωρία: η εξ-Laplace είναι αναλλοίωτη κάτω από περιστροφές]

$= v(r)$, με $r = |x|$

Άρα, θέτουμε $u(x) = v(|x|)$ και κοιτάμε τι προκύπτει για το v, αν $\Delta u = 0$.

$$u(x) = v(|x|) = v\left((x_1^2+\dots+x_n^2)^{1/2}\right)$$

$$\Rightarrow u_{x_i}(x) = v'(|x|)\frac{\partial |x|}{\partial x_i} = v'(|x|)\frac{x_i}{|x|}, \quad x \neq 0$$

$$\Rightarrow u_{x_ix_i}(x) = \left(v''(|x|)\frac{x_i}{|x|}\right)\frac{x_i}{|x|} + v'(|x|)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{|x|}\right)$$

$$= \frac{1}{|x|} + x_i\frac{\partial}{\partial x_i}(|x|^{-1})$$

$$= -\frac{1}{|x|^2}\frac{\partial |x|}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{|x|^3}$$

$$= \frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3}$$

$$\Rightarrow \Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} v''(|x|)\cdot\frac{x_i^2}{|x|} + v'(|x|)\left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3}\right)$$

$$= v''(|x|) + v'(|x|)\left(\frac{n}{|x|} - \frac{1}{|x|}\right)$$

Άρα, $\Delta u = 0 \underset{u(x)=v(r)}{\iff} v''(r) + v'(r)\frac{n-1}{r} = 0$

Η $v''(r) + v'(r)\frac{n-1}{r} = 0$, $r>0$

ικανοποιείται από μία $v'(r)$ 0 με $\frac{v''}{v'} = \frac{1-n}{r} \Rightarrow$

$$\underbrace{\int \frac{v''}{v'}\,dr}_{} = \int \frac{1-n}{r}\,dr = (1-n)\ln r$$

$$\underset{w=v'}{=} \int \frac{w'}{w}\,dr = \ln w + c$$

$\Rightarrow |w| = e^{(1-n)\ln r - c} = r^{(1-n)} \cdot \underbrace{e^{-c}}_{=\tilde{a}}$

$\Rightarrow v'(r) = r^{(1-n)} \cdot \tilde{a}$, $\tilde{a} \neq 0$

$\Rightarrow v(r) = \frac{1}{-n}\tilde{a} r^{2-n} + \underset{\in \mathbb{R}}{\tilde{\tilde{a}}}$

$\boxed{n \geq 3}$

Ενώ για $\boxed{n=2}$: $v'(r) = \frac{\tilde{\tilde{a}}}{r}$

$\Rightarrow v(r) = \tilde{a}\ln r + a'$ ($\tilde{\tilde{a}} \in \mathbb{R}$ προφανώς η $w=0$ είναι λύση).

Συνεπώς, όλες οι ακτινικές συναρτήσεις $u(x) = v(|x|) = v(r)$ της μορφής

$$v(r) = \begin{cases} b\ln r + c, & n=2 \\ b\frac{1}{r^{n-2}} + c, & n \geq 3 \end{cases}$$

επιλύουν της $\Delta u(x) = 0$, για $x \neq 0$!

Για τους «κανονικοποιημένους» συντελεστές ονομάζουμε την συνάρτηση

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln|x|, & n=2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \cdot \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 2, x \neq 0 \end{cases}$$

<u>Θεμελιώδη λύση</u> της εξίσωσης Laplace στον $\mathbb{R}^n$.

$\alpha(n)$ = όγκος της μοναδιαίας μπάλας στον $\mathbb{R}^n$.

Εργασία για το σπίτι: μήπως επιλύει και η συνάρτηση (εικόνα στο e-course) την $\Delta u = 0$ στο $\mathbb{R}^n$?

Γενικά: Εκτός από ακτινικές υπάρχουν άλλες μεγάλες κατηγορίες λύσεων της Laplace?

<u>Παρατήρηση</u>: Προσοχή! Η θεμελιώδης λύση που βρήκαμε (καθώς και οι γενικές λύσεις $v(r) = \ldots$) ικανοποιούν την εξ. Laplace <u>μόνο</u> στο $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ενώ για $r = |x| \to 0$, απειρίζονται!